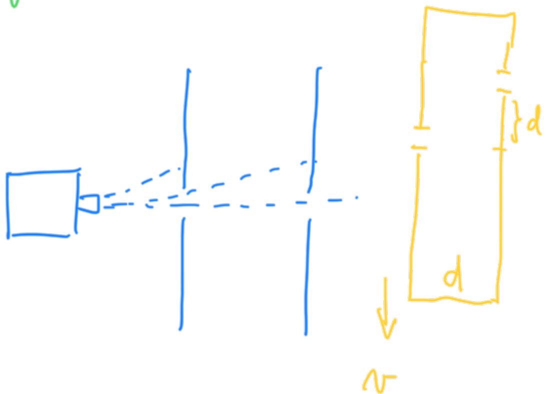
Měřitelné veličiny jako operátory

Postavme si filtr měřicí přístroj

Hybnost částice



Filtr na rychlost $v \pm dv$

tj. $p \pm dp$

$p = mv$

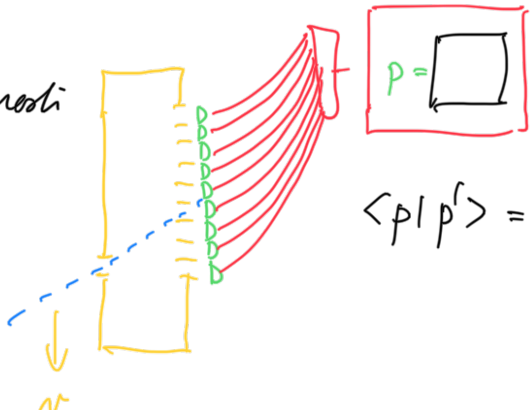
$dp = m\,dv$

$$\hat{F}_p = |p\rangle\langle p|$$

$$\mathbb{1} = \sum_p |p\rangle\langle p|$$

Střední hodnota hybnosti

Filtr na všechny hybnosti



$$\langle p|p'\rangle = 0$$

Máme stav $|\psi\rangle$ filtr na $|p\rangle$ vybere s pravděpodobností $|\langle p|\psi\rangle|^2$ stav $|p\rangle$

$$\boxed{\langle p\rangle = \sum_p |\langle p|\psi\rangle|^2\, p}$$

$$\langle p\rangle = \sum_p \langle p|\psi\rangle\langle\psi|p\rangle\, p = \sum_p p\,\langle\psi|p\rangle\langle p|\psi\rangle =$$

$$= \langle\psi|\underbrace{\left(\sum_p p\,|p\rangle\langle p|\right)}_{\text{operátor hybnosti} \,\equiv\, \hat{P}}|\psi\rangle$$

$$\boxed{\langle p\rangle = \langle\psi|\hat{P}|\psi\rangle} \leftarrow \text{očekávaná střední hodnota hybnosti}$$

Princip: Je-li veličině A přiřazen operátor $\hat{A}$ a systém je ve stavu $|\psi\rangle$, pak OSH veličiny A tj. $\langle A\rangle$ je rovna výrazu $\langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle$.

Princip: Pro každý stav fyzikálního systému dokáže kvantová mechanika předpovídat pouze pravděpodobnost výsledku měření.

Pozn.: existují případy s pravděpodobností 1

Princip: Každé měřitelné veličině náleží v kvantové mechanice operátor složený ze všech možných různých měřitelných stavů systému a s reálnými hodnotami dané veličiny odpovídajícími těmto měřitelným stavům.

Pozn: měřitelné stavy $|s_i\rangle$ $i = 1, \dots, N$ a hodnoty s_i

$$\hat{S} = \sum_i s_i |s_i\rangle\langle s_i|$$

stavy $|s_i\rangle$ jsou automaticky vlastními vektory operátoru $\hat{S}$ s vlastními hodnotami s_i

$$\hat{S}|s_k\rangle = \sum_i s_i |s_i\rangle \underbrace{\langle s_i|s_k\rangle}_{\delta_{ik}} = s_k |s_k\rangle$$

Pozn:

$$|s_i\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{i-té místo} \qquad |s_i\rangle\langle s_i| = \begin{array}{c c} & \text{i-tý sloupec} \\ & \downarrow \\ & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{i-tý řádek} \end{array}$$

$$\hat{S} = \begin{pmatrix} s_1 & & & 0 \\ & s_2 & & \\ & & s_3 & \\ 0 & & & \ddots \end{pmatrix}$$

Pozn: Báze $|a_n\rangle$ $n = 1, \dots, N$

$$|s_k\rangle = \sum_n |a_n\rangle\langle a_n| \, |s_k\rangle = \sum_n \langle a_n|s_k\rangle |a_n\rangle$$

$$\Rightarrow \quad \hat{S} = \sum_i s_i |s_i\rangle\langle s_i| = \sum_i s_i \sum_n \langle a_n|s_i\rangle |a_n\rangle \sum_m \langle s_i|a_m\rangle\langle a_m|$$

$$= \sum_{nm} \underbrace{\left(\sum_i s_i \langle a_n|s_i\rangle\langle s_i|a_m\rangle \right)}_{S_{nm}} |a_n\rangle\langle a_m|$$

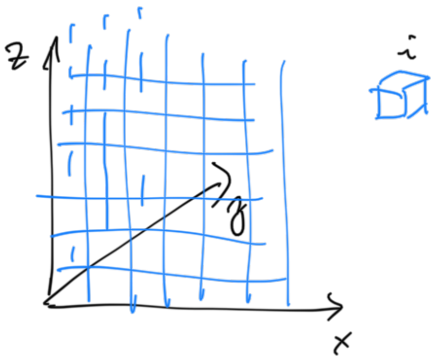
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & - & \cdot \\ \cdot & - & - & \\ \cdot & - & - & \cdot \\ - & - & & \cdot \end{pmatrix} \text{ plná matice}$$

$$S_{mn} = S^*_{mn}$$

$$= \sum_i s_i \langle a_n | s_i \rangle \langle s_i | a_m \rangle = \sum_i s_i \langle a_m | s_i \rangle^* \langle s_i | a_n \rangle^* = S^*_{mn}$$

Princip: Měřitelné veličiny jsou reprezentovány hermitovskými operátory

Měření polohy částice



$|\vec{r}_i\rangle$; $\vec{r}_i$

$$\boxed{\hat{R} = \sum_i \vec{r}_i |\vec{r}_i\rangle\langle\vec{r}_i|}$$

$$\boxed{\hat{P} = \sum_i \vec{p}_i |\vec{p}_i\rangle\langle\vec{p}_i|}$$

$$\langle \vec{r}_i | \vec{p}_j \rangle = ?$$