Kvantová mechanika ve 4 postulátech

Postulát 1:

Každému izolovanému systému je přiřazen komplexní vektorový prostor se skalárním součinem (tzv. Hilbertův prostor) známý jako stavový prostor systému. Systém je kompletně popsán stavovým vektorem, což je jednotkový vektor v Hilbertově prostoru systému.

$|\Psi\rangle$ ... stavový vektor

$\{|a\rangle\} \equiv \{|a\rangle, a = 1, \dots, N\}$ $\qquad \langle a|b\rangle = \delta_{ab}$

$\sum_{a=1}^{N} |a\rangle\langle a| = \mathbb{1}$ ... relace úplnosti

$\int dq\, |q\rangle\langle q| = \mathbb{1}$ ... relace úplnosti pro kontinuální bázi
$\langle q|q'\rangle = \delta(q-q')$

$|\Psi\rangle = \sum_a c_a |a\rangle \qquad \Rightarrow \quad c_a = \langle a|\Psi\rangle$

nebo

$|\Psi\rangle = \int dq\, c(q)\, |q\rangle \quad \Rightarrow \quad c(q) = \langle q|\Psi\rangle = \Psi(q)$

$|\Psi(q)|^2$ ... hustota pravděpodobnosti nalézt systém s koordinátou q

$\Psi(q)$ ... amplituda pravděpodobnosti

Postulát 2

Časový vývoj uzavřeného systému je popsán unitární transformací. To znamená, že stav $|\Psi\rangle$ systému v čase t_1 je spojen se stavem $|\Psi'\rangle$ v čase t_2 unitárním operátorem U, který závisí jen na časech t_1 a t_2

$$|\Psi'\rangle = \hat{U}(t_2, t_1)\,|\Psi\rangle$$

Časový vývoj stavu uzavřeného systému je popsán Schrödingerovou rovnicí

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}|\Psi(t)\rangle = \hat{H}\,|\Psi(t)\rangle,$$

kde $\hbar$ je Planckova konstanta a $\hat{H}$ je Hamiltonián, což je hermitovský operátor energie systému.

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}\,|\Psi(0)\rangle \qquad t_0 = 0$$

$$\hat{U}(t_2, t_1) = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t_2 - t_1)}$$

Postulát 3

Měření v kvantové mechanice je popsáno sadou $\{\hat{M}_n\}$ měřících operátorů. Tyto operátory působí na stavový prostor (Hilbertově) měřeného systému. Index n čísluje možné výsledky měření. Je-li systém ve stavu $|\Psi\rangle$ pak výsledek n se objeví s pravděpodobností

$$p(n) = \langle \Psi | M_n^{\dagger} M_n | \Psi \rangle$$

a po měření je systém ve stavu

$$\frac{\hat{M}_n |\Psi\rangle}{\sqrt{\langle \Psi | M_n^{\dagger} M_n | \Psi \rangle}}$$

Měřící operátory splňují relaci úplnosti

$$\sum_n M_n^{\dagger} M_n = \mathbb{1}$$

$$\hat{M}_n = |n\rangle\langle n|$$

báze $\{|n\rangle\}$

$$\sum_n |n\rangle \underbrace{\langle n|n\rangle}_{1} \langle n| = \sum_n |n\rangle\langle n| = \mathbb{1}$$

$$p(n) = \langle \Psi | n \rangle \underbrace{\langle n|n\rangle}_{1} \langle n|\Psi\rangle = \langle \Psi|n\rangle\langle n|\Psi\rangle = |\langle n|\Psi\rangle|^2$$

Změna stavu při měření

$$\hat{M}_n = |\varepsilon\rangle\langle n| \leftarrow \text{všechny stavy } |n\rangle \text{ projektovány na } \varepsilon$$

$$p(n) = \langle\psi|\hat{M}_n^\dagger \hat{M}_n|\psi\rangle = \langle\psi|n\rangle\underbrace{\langle\varepsilon|\varepsilon\rangle}_{1}\langle n|\psi\rangle = |\langle\psi|n\rangle|^2$$

Stav po měření:

$$|\psi_{post}\rangle = \frac{\hat{M}_n|\psi\rangle}{\sqrt{|\langle n|\psi\rangle|^2}} = \frac{|\varepsilon\rangle\langle n|\psi\rangle}{|\langle n|\psi\rangle|} = |\varepsilon\rangle\frac{\langle n|\psi\rangle}{|\langle n|\psi\rangle|}$$

$$\langle\psi_{post}|\psi_{post}\rangle = \langle\varepsilon|\varepsilon\rangle\frac{|\langle n|\psi\rangle|^2}{|\langle n|\psi\rangle|^2} = 1$$

náš obvyklý případ

$$p(n) = \langle\psi|\hat{M}_n|\psi\rangle \qquad \hat{M}_n\hat{M}_n = \hat{M}_n$$

$$|\psi_{post}\rangle = \frac{\hat{M}_n|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|\hat{M}_n|\psi\rangle}}$$

Postulát 4

Stavový prostor systému složeného z podsystémů je direktním součinem stavových prostorů podsystémů. Pro podsystémy číslované od 1 do n platí, že pokud je i-tý podsystém ($i = 1, \ldots, n$) připraven ve stavu $|\psi_i\rangle$, pak stav složeného systému je

$$|\psi\rangle = |\psi_1\rangle|\psi_2\rangle\ldots|\psi_n\rangle = |\psi_1\rangle\otimes|\psi_2\rangle\otimes\ldots\otimes|\psi_n\rangle$$