Přehled kvantové mechaniky

Co potřebujeme znát z kvantové mechaniky?

Schrödingerova rovnice

hamiltonián

$$\frac{\partial}{\partial t}|\Psi(t)\rangle = -\frac{i}{\hbar} H |\Psi(t)\rangle$$

stavový vektor

Časový vývoj

počáteční podmínka

$$|\Psi(t)\rangle = \underbrace{e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}}_{\text{evoluční operátor}} |\Psi(0)\rangle$$

Ověření:

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(\underbrace{e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}|\Psi(0)\rangle}_{|\Psi(t)\rangle}\Big) = -\frac{i}{\hbar} H \Big(\underbrace{e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}|\Psi(0)\rangle}_{|\Psi(t)\rangle}\Big)$$

Reprezentace

$\longrightarrow$ báze $\{|n\rangle\} = \{|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle, \dots\}$

Hamiltonián

$$H = \sum_{nm} h_{nm} |n\rangle\langle m| \Rightarrow \begin{pmatrix} \varepsilon_0 & h_{01} & \dots & \\ h_{10} & \varepsilon_2 & h_{12} & \dots \\ \vdots & h_{21} & \varepsilon_3 & \\ \vdots & & & \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\sum_n |n\rangle\langle n|}_{\mathbb{1}} H \underbrace{\sum_m |m\rangle\langle m|}_{\mathbb{1}} = \sum_{nm} \underbrace{\langle n|H|m\rangle}_{= h_{nm}} |n\rangle\langle m|$$

$= h_{nm}$; $\varepsilon_n \equiv h_{nn}$

Speciální báze $\rightarrow$ diagonalizující hamiltonián $\{|\alpha\rangle\}$

$$H|\alpha\rangle = \varepsilon_\alpha |\alpha\rangle$$

$$H = \sum_\alpha \varepsilon_\alpha |\alpha\rangle\langle\alpha| = \sum_{\alpha\beta} |\alpha\rangle\langle\alpha| \sum_{nm} h_{nm} |n\rangle\langle m|\beta\rangle\langle\beta|$$

$$\simeq \sum_\alpha |\alpha\rangle \underbrace{\left(\sum_{nm} h_{nm} \langle\alpha|n\rangle\langle m|\alpha\rangle\right)}_{\varepsilon_\alpha} \langle\alpha|$$

Evoluční operátor

$$U(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht} = \sum_\alpha e^{-\frac{i}{\hbar}\varepsilon_\alpha t} |\alpha\rangle\langle\alpha|$$

Stavový vektor

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n a_n(t) |n\rangle \leftarrow$$ v této bázi nelze napsat snadno časový vývoj

V bázi vlastních stavů hamiltoniánu

$$|\psi(t)\rangle = \sum_\alpha a_\alpha(t)|\alpha\rangle = \sum_\alpha a_\alpha(0)\, e^{-\frac{i}{\hbar}\varepsilon_\alpha t} |\alpha\rangle$$

Použitím evolučního operátoru:

$$U(t)|\psi(0)\rangle = \sum_\alpha e^{-\frac{i}{\hbar}\varepsilon_\alpha t} |\alpha\rangle\langle\alpha| \sum_\beta a_\beta(0)|\beta\rangle$$

$\langle\alpha|\beta\rangle = \delta_{\alpha\beta}$

$$= \sum_\alpha e^{-\frac{i}{\hbar}\varepsilon_\alpha t} a_\alpha(0)|\alpha\rangle$$