Systémy s více stupni volnosti

Klasická volná částice = 3 stupně volnosti

$$\vec{r} = (x, y, z) \quad ; \quad \vec{p} = (p_x, p_y, p_z)$$

spin = 1 stupeň volnosti

Jak popsat částici se spinem a hybností ?

stav $|p_x, p_y, p_z, +z\rangle$ je stav s impulsem $\vec{p} = (p_x, p_y, p_z)$
a spinem $|+z\rangle$

$$\hat{p}_x |p_x, p_y, p_z, +z\rangle = p_x |p_x, p_y, p_z, +z\rangle$$

$$\hat{p}_y |\ldots\rangle = p_y |\ldots\rangle$$

$$\hat{S}_z |p_x, p_y, p_z, +z\rangle = \frac{1}{2} |p_x, p_y, p_z, +z\rangle$$

Konstrukce dalších operátorů

$$\hat{p}^2 = \hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2 + \hat{p}_z^2$$

$$\hat{p}^2 |p_x, p_y, p_z, +z\rangle = (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) |p_x, p_y, p_z, +z\rangle$$

$$\langle \hat{p}^2 \rangle = \langle p_x, p_y, p_z, +z | \hat{p}^2 | p_x, p_y, p_z, +z\rangle$$
$$= p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$$

Jak zkonstruovat $|p_x, p_y, p_z, +z\rangle$ z vektorů $|p_x\rangle, |p_y\rangle, |p_z\rangle$
$|+z\rangle$?

Mohlo by to fungovat takto:

$$|p_x, p_y, p_z, +z\rangle = |p_x\rangle |p_y\rangle |p_z\rangle |+z\rangle$$

$\hat{p}_x$ působí pouze na vektory z příslušného Hilbertova prostoru

$$\hat{p}_x |p_x, p_y, p_z, +z\rangle = p_x |p_x, p_y, p_z, +z\rangle$$

zkratka

$$\hat{p}_x |p_x, p_y, p_z, +z\rangle = \hat{p}_x \hat{\mathbb{1}}_y \hat{\mathbb{1}}_z \hat{\mathbb{1}}_{spin} |p_x\rangle |p_y\rangle |p_z\rangle |+z\rangle$$

$$\hat{S}_z |p_x, p_y, p_z, +z\rangle = \hat{\mathbb{1}}_x \hat{\mathbb{1}}_y \hat{\mathbb{1}}_z \hat{S}_z |p_x\rangle |p_y\rangle |p_z\rangle |+z\rangle = \frac{1}{2} |\ldots\rangle$$

Pozn.:

zkratka pro

$$\hat{p}_x \hat{\mathbb{1}}_y \hat{\mathbb{1}}_z \hat{\mathbb{1}}_{spin} \Rightarrow \hat{p}_x \otimes \hat{\mathbb{1}}_y \otimes \hat{\mathbb{1}}_z \otimes \hat{\mathbb{1}}_{spin}$$

$$|p_x\rangle |p_y\rangle |p_z\rangle \Rightarrow |p_x\rangle \otimes |p_y\rangle \otimes |p_z\rangle$$

Česky: direktní součin

anglicky: "outer product", "tensor product", "direct prod."

Prostor stavů pro více stupňů volnosti

$\Rightarrow$ direktní součin prostorů stavů jednotlivých stupňů volnosti

$$\mathcal{H}_A \sim \{|a\rangle\}$$
$$\mathcal{H}_B \sim \{|b\rangle\}$$
$$\Rightarrow \mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$$

báze $\{|a\rangle|b\rangle\}$

Příklad:

$\mathcal{H}_A$ .. $|1\rangle_A$, $|2\rangle_A$

$\mathcal{H}_B$ .. $|1\rangle_B$, $|2\rangle_B$, $|3\rangle_B$

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B \Rightarrow \left.\begin{array}{l} |1\rangle_A |1\rangle_B \\ |1\rangle_A |2\rangle_B \\ |1\rangle_A |3\rangle_B \\ |2\rangle_A |1\rangle_B \\ |2\rangle_A |2\rangle_B \\ |2\rangle_A |3\rangle_B \end{array}\right\} \text{6 stavů na } \mathcal{H}$$

Dvojí x, p_x patří do jednoho stupně volnosti.