Interakční obraz

- Interakční obraz používáme formálně k odstranění některých členů z pohybové rovnice
- — " — používáme k odstranění rychlé dynamiky z veličin (stavový vektor nebo statistický operátor)

Interakční obraz pro stavový vektor

$$H = \underbrace{\sum_n \mathcal{E}_n |n\rangle\langle n|}_{H_0} + \underbrace{\sum_{nm} J_{nm} |n\rangle\langle m|}_{H_J}$$

$H_J \leftarrow$ slabé $|J_{nm}| \ll |\mathcal{E}_n|$

$$\frac{\partial}{\partial t}|\Psi(t)\rangle = -\frac{i}{\hbar} H_0 |\Psi(t)\rangle - \frac{i}{\hbar} H_J |\Psi(t)\rangle \quad ; \quad |\Psi(t)\rangle = \sum_n c_n(t)|n\rangle$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\sum_n c_n(t)|n\rangle = -\frac{i}{\hbar}\sum_n \mathcal{E}_n |n\rangle \overbrace{\langle n| \sum_m c_m(t)|m\rangle}^{\delta_{nm}} - \frac{i}{\hbar}\sum_{nm} J_{nm}|n\rangle \overbrace{\langle m| \Big(\sum_k c_k(t)|k\rangle}^{\delta_{mk}}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\sum_n c_n(t)|n\rangle = -\frac{i}{\hbar}\sum_n \mathcal{E}_n |n\rangle c_n(t) - \frac{i}{\hbar}\sum_{nm} J_{nm} c_m(t)\, |n\rangle$$

Násobit z leva $\langle k|$

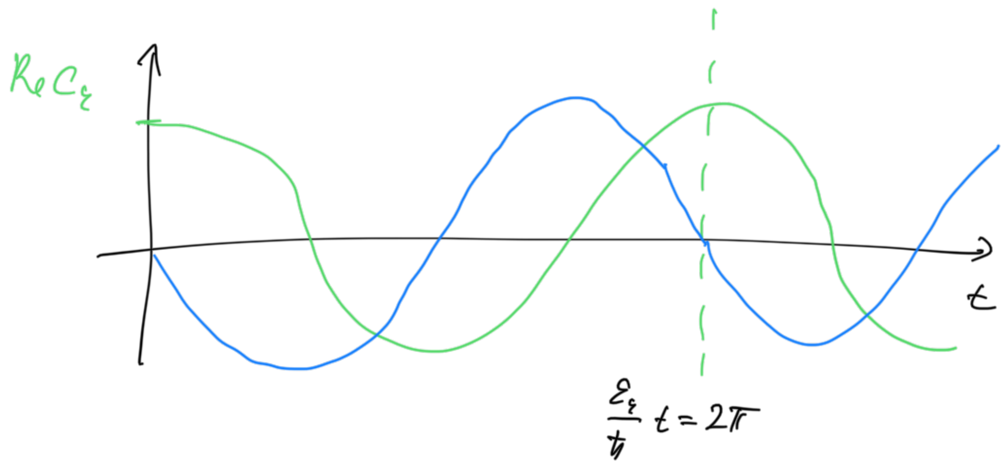
$$\frac{\partial}{\partial t} c_k(t) = -\frac{i}{\hbar}\mathcal{E}_k c_k(t) - \frac{i}{\hbar}\sum_m J_{km} c_m(t)$$

Je-li $\mathcal{E}_k \gg J_{km}$ pak J bude působit jen malé (pomalé) změny v C_k. Rychlé změny budou způsobeny $\mathcal{E}_k$.

Když je $J = 0$ $\Rightarrow$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} c_\varepsilon(t) = -\frac{i}{\hbar} \mathcal{E}_\varepsilon c_\varepsilon(t)}$$

$$\Rightarrow \quad c_\varepsilon(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}\mathcal{E}_\varepsilon t} c_\varepsilon(0)$$



Čím větší $\mathcal{E}_\varepsilon$, tím rychlejší oscilace

Kdybychom vynásobili $c_\varepsilon(t)$ exponenciálou s opačnou frekvencí $\Rightarrow$ statické $c_\varepsilon(0)$ .. žádná časová změna

Pro všechna c_ε najdeme:

$$H_J = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = -\frac{i}{\hbar} H_0 |\psi(t)\rangle$$

$\dagger \equiv +$ znamená vývoj opět v čase

Definujme:
$$|\psi^{(I)}(t)\rangle = e^{\frac{i}{\hbar} H_0 t} |\psi(t)\rangle = U^{\dagger}(t)|\psi(t)\rangle$$

přeformulujme pohybovou rovnici pro $|\psi^{(I)}(t)\rangle$

$$\frac{\partial}{\partial t}|\Psi^{(I)}(t)\rangle = \frac{\partial}{\partial t}\left(U^\dagger(t)|\Psi(t)\rangle\right)$$

$$= \frac{i}{\hbar}H_0 U^\dagger(t)|\Psi(t)\rangle + U^\dagger(t)\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}|\Psi(t)\rangle}_{\text{dosadíme z původní Schrödingerovy rovnice}}$$

$$= \frac{i}{\hbar}H_0 U^\dagger(t)|\Psi(t)\rangle + U^\dagger(t)\left(-\frac{i}{\hbar}H_0\right)|\Psi(t)\rangle$$

můžeme prokomutovat

$$= 0$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}|\Psi^{(I)}(t)\rangle = 0}$$

Úplně jsme odstranili dynamiku!

Je-li $H_I = 0$ $\Rightarrow$ žádný vývoj v interakčním obraze!

nenulový interakční hamiltonián

Stejný interakční obraz pro rovnici $\frac{\partial}{\partial t}|\Psi(t)\rangle = -\frac{i}{\hbar}(H_0 + \underline{\underline{H_I}})|\Psi(t)\rangle$

$$|\Psi^{(I)}(t)\rangle = U_0^\dagger(t)|\Psi(t)\rangle$$

Interakční obraz „vzhledem k H_0“

$$U_0(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}H_0 t}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}|\Psi^{(I)}(t)\rangle = U_0^\dagger(t)\left(-\frac{i}{\hbar}H_I|\Psi(t)\rangle\right)$$

$$U_0(t)U_0^\dagger(t) = 1$$

Tímto z toho uděláme uzavřenou rovnici pro $|\Psi^{(I)}(t)\rangle$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}|\Psi^{(I)}(t)\rangle = -\frac{i}{\hbar}\underbrace{\left(U_0^{+}(t)\, H_J\, U_0(t)\right)}_{H_J^{(I)}(t)\,\equiv\, U_0^{+}(t)\, H_J\, U_0(t)}|\Psi^{(I)}(t)\rangle}$$

interakční hamiltonián v interakčním obraze

Obecně pro operátor $\hat{A}$ máme $\hat{A}^{(I)}(t) = U_0^{+}(t)\,\hat{A}\,U_0(t)$

Pozor! Je rozdíl mezi časovým vývojem operátoru a jeho interakčním obrazem – jdou proti sobě.

Př: Časový vývoj matice hustoty (pro $H_J = 0$)

$$\hat{\rho}(t) = U_0(t)\,\hat{\rho}(0)\,U_0^{+}(t)$$

Interakční obraz matice hustoty

$$\begin{aligned}\hat{\rho}^{(I)}(t) &= U_0^{+}(t)\,\hat{\rho}(t)\,U_0(t)\\ &= U_0^{+}(t)\,U_0(t)\,\hat{\rho}(0)\,U_0^{+}(t)\,U_0(t)\\ &= \hat{\rho}(0) \Rightarrow \text{interakční obraz se nevyvíjí!}\end{aligned}$$

Vhodně zvolený interakční obraz odstraňuje z vývoje rychlou dynamiku – a umožňuje aproximace.

Interakční obraz pro statistický operátor

Ověřili jsme, že $\rho^{(I)}(t)$ neobsahuje dynamiku od H_0

$H_J \neq 0$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(t) = -\frac{i}{\hbar}\left[H_0, \rho(t)\right] - \frac{i}{\hbar}\left[H_J, \rho(t)\right]$$

$$\rho^{(I)}(t) = U_0^{\dagger}(t)\rho(t)U_0(t)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho^{(I)}(t) = \frac{i}{\hbar}H_0 U_0^{\dagger}(t)\rho(t)U_0(t) - \frac{i}{\hbar}U_0^{\dagger}(t)\rho(t)U_0(t)H_0 + U_0^{\dagger}(t)\frac{\partial}{\partial t}\rho(t)\,U_0(t)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho^{(I)}(t) = -\frac{i}{\hbar}U_0^{\dagger}(t)\,H_J\,\rho(t)\,U_0(t) + \frac{i}{\hbar}U_0^{\dagger}(t)\rho(t)\,H_J\,U_0(t)$$

$U_0(t)U_0^{\dagger}(t) = 1$ $\qquad$ $U_0(t)U_0^{\dagger}(t) = 1$

$$= -\frac{i}{\hbar}\left[H_J^{(I)}(t), \rho^{(I)}(t)\right]$$

Všechno funguje analogicky stavovému vektoru

Pravidla interakčního obrazu

$$\rho(t) \xrightarrow{(I)} \rho^{(I)}(t)$$

$$H_0 \longrightarrow \times$$

$$H_J \longrightarrow H_J^{(I)}(t)$$